스타 그래프와 팬케익, 버블정렬 그래프 사이의 임베딩 알고리즘

김종석† · 이형옥†† · 김성원†††

요 약

스타 그래프는 노드 대칭성, 최대 고장 허용도, 계층적 분할 성질을 갖고, 하이퍼큐브보다 망 비용이 개선된 널리 알려진 상호 연결망이다. 본 연구에서는 스타 그래프와 그의 변형된 그래프들 상호 간의 임베딩 방법을 제안한다. 버블정렬 그래프가 팬케익 그래프와 스타 그래프에 각각 연장율 3, 확장율 1로 임베딩 가능함을 보이고, 팬케익 그래프가 버블정렬그래프에 임베딩 하는 연장율 비용이 $O(n^2)$임을 보인다. 그리고 스타 그래프가 팬케익 그래프에 연장율 4, 확장율 1로 임베딩 가능함을 보인다. 또한 스타그래프를 버블정렬 그래프에, 팬케익 그래프를 스타 그래프에 임베딩 하는 연장율 비용이 각각 $O(n)$임을 보인다.

주제어 : 스타 그래프, 팬케익 그래프, 버블정렬 그래프, 임베딩, 알고리즘

Embedding algorithm among star graph and pancake graph, bubblesort graph

Jongseok Kim† · Hyeongok Lee†† · Sung Won Kim†††

ABSTRACT

Star graph is a well-known interconnection network to further improve the network cost of Hypercube and has good properties such as node symmetry, maximal fault tolerance and strongly hierarchical property. In this study, we will suggest embedding scheme among star graph and pancake graph, bubblesort graph, which are variations of star graph. We will show that bubblesort graph can be embedded into pancake and star graph with dilation 3, expansion 1, respectively and pancake graph can be embedded into bubblesort graph with dilation cost $O(n^2)$. Additionally, we will show that star graph can be embedded into pancake graph with dilation 4, expansion 1. Also, with dilation cost $O(n)$ we will prove that star graph can be embedded into bubblesort graph and pancake graph can be embedded into star graph .

Keywords : Star graph, Pancake graph, Bubblesort graph, Embedding, Algorithm

---

† 정 회 원: 영남대학교 정보통신공학과 연구교수
†† 정 회 원: 순천대학교 컴퓨터교육과(교신저자)
††† 정 회 원: 영남대학교 정보통신공학과 부교수
논문접수: 2010년 09월 06일, 심사완료: 2010년 09월 21일
* 본 논문은 2009년 순천대학교 학술연구비 공모과제로 연구되었음.

1. 서 론

최근 반도체 기술의 발달과 높은 성능을 요구하는 응용분야의 증대로 고성능 컴퓨터에 대한 관심이 증대하고 있다. 고성능을 얻기 위한 방법으로 병렬처리에 대한 필요성이 크게 증가하여 병렬컴퓨터 대한 연구가 많이 진행되고 있다. 병렬컴퓨터는 크게 공유 기억 장치를 갖는 다중프로세서(multiprocessor) 시스템과 분산 기억 장치를 사용하는 다중컴퓨터(multicomputer) 시스템으로 분류한다. 다중컴퓨터 시스템은 각각의 프로세서들이 자신의 기억 장치를 갖고 각 프로세서는 상호 연결망에 의해 연결되어 있으며 프로세서간의 통신은 상호 연결망을 통하여 메시지 전송 방식으로 이루어진다. 다중컴퓨터에서 상호 연결망은 전체 시스템의 성능과 시스템의 확장성에 큰 영향을 미친다. 지금까지 널리 알려진 상호 연결망으로 메쉬, 하이퍼큐브, 스타(star) 그래프 등이 있다. 상호연결망을 평가하는 망 척도는 분지수(degree), 지름(diameter), 대칭성(symmetry), 확장성(scalability), 고장허용도(fault tolerance), 임베딩(embedding) 등이 있다.

다양한 연결망 구조에서 여러 가지 문제들을 풀기 위해 병렬 알고리즘들이 설계되었다. 이 알고리즘들을 원래와는 다른 연결망 구조에서 실행시킬 수 있는 방법이 있다면 이는 이미 개발된 알고리즘을 효율적으로 사용할 수 있는 장점으로 인해 알고리즘 분야에서 의미 있는 연구이다. 이러한 연구방법 중 널리 사용되는 것으로 임베딩이 있다[1][2][3][4][5][6][7]. 임베딩은 한 연결망의 프로세서와 통신링크를 다른 연결망의 프로세서와 통신링크들로 사상(mapping)시키는 방법을 일컫는다. 상호 연결망의 임베딩은 어떤 그래프 G가 다른 그래프 H에 포함 혹은 어떻게 연관되어 있는지를 알아보기 위해 그래프들간의 관계를 분석하기 위한 평가 척도이다. 그래프 G가 다른 그래프 H에 적은 비용으로 임베딩 가능하다는 것은 연결망 G에서 개발된 알고리즘을 연결망 H에서 적은 비용으로 효율적으로 이용할 수 있다는 것을 나타낸다.

본 논문에서는 스타그래프 부류로 널리 알려진 스타(Star) 그래프[8]와 팬케익(Pancake) 그래프[9] 그리고 버블정렬(Bubblesort) 그래프[10] 간의 임베딩을 분석한다. 버블정렬 그래프가 팬케익 그래프와 스타 그래프에 각각 연장율 3, 확장율 1로 임베딩 가능함을 보이고, 팬케익 그래프가 버블정렬그래프에 임베딩 하는 연장율 비용이 $O(n^2)$임을 보인다. 그리고 스타 그래프가 팬케익 그래프에 연장율 4, 확장율 1로 임베딩 가능함을 보인다. 또한 스타그래프를 버블정렬 그래프에, 팬케익 그래프를 스타 그래프에 임베딩 하는 연장율 비용이 각각 $O(n)$임을 보인다.

논문구성은 다음과 같다. 2장에서 본 연구에서 적용되는 그래프의 정의와 성질을 그래프 이론 관점에서 알아보고 3장에서 스타 그래프와 팬케익 그래프 그리고 버블정렬 그래프 사이의 임베딩 방법과 연장율을 분석하고 마지막으로 결론을 맺는다.

2. 관련 연구

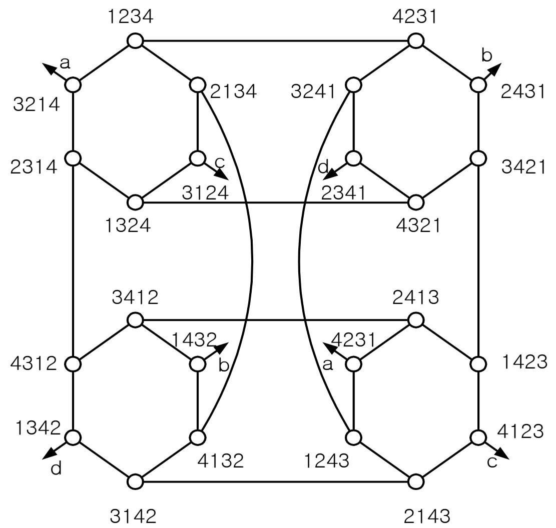
상호 연결망은 각 프로세서를 노드로 프로세서들 간의 통신 채널을 에지로 나타내는 무방향 그래프 $G=(V,E)$로 표현된다. 여기서 $V(G)$는 노드들의 집합 즉 $V(G)=\{0,1,2,....,N-1\}$이고, $E(G)$는 에지의 집합으로써 $V(G)$ 내의 임의의 두 노드 v와 w의 쌍 (v,w)으로서 에지 (v,w)가 존재할 필요충분 조건은 노드 v와 w 사이에 통신 채널이 존재하는 것이다. 지금까지 제안된 상호연결망을 노드수를 중심으로 분류하면 n×k개 노드를 갖는 메쉬 부류, 2^n개 노드를 갖는 하이퍼큐브 부류, n!개 노드를 갖는 스타그래프 부류로 나눌 수 있다. 스타그래프 부류는 n개의 심볼을 이용하여 노드 표현의 개수가 대략 n!개 이고, 분지수는 대략 n개 정도를 갖도록 구성되었다. 이러한 스타그래프 부류로 스타(Star) 그래프[8], 버블정렬(Bubblesort) 그래프[10], 팬케익(Pancake) 그래프[9], 전치

(Transposition) 그래프[11], 매크로-스타(Macro-star) 그래프[12] 등이 제안되었다. 스타(Star)그래프는 하이퍼큐브와 비슷한 노드 개수를 가질 때 상대적으로 적은 노드 개수와 짧은 지름을 갖는 장점이 있지만, 노드 개수 증가율이 급격하고 하이퍼큐브 부류와 임베딩이 어려운 단점이 있다.

n-차원 스타(Star) 그래프 S_n은 n!개의 노드와 $n!(n-1)/2$개의 에지로 구성된다. 각 노드의 주소는 n개의 서로 다른 심볼의 순열로 표현될 수 있고, 노드 v와 w의 순열에서 첫 번째 심볼과 나머지 n-1개 심볼 중 한 개의 심볼이 교환된 순열을 갖는 노드 v와 w 사이에 에지가 존재한다. n개의 서로 다른 집합 $\langle N\rangle=\{1,2,..,n\}$ 이라 하고, $\langle N\rangle$의 순열 $S=s_1s_2...s_n$, $s_i \in \langle N\rangle$이라 하면 스타그래프 S_n은 다음과 같이 정의된다.

$$V(S_n)=\{(s_1s_2...s_i...s_n) \mid s_i \in \langle N\rangle,\ i \neq j,\ s_i \neq s_j\}$$
$$E(S_n)=\{(s_1s_2...s_i...s_n)(s_is_2...s_1...s_n) \mid (s_1s_2...s_i...s_n) \in V(S_n),\ 2 \leq i \leq n\}$$

n개의 심볼로 구성된 어떤 순열과 그 순열의 첫 번째 자리와 i번째 자리를 바꾼 순열 사이에 에지가 있으므로 스타그래프 S_n은 분지수가 n-1인 정규 그래프이다($2 \leq i \leq n$). <그림 1>은 4차원 스타그래프의 예이다. 스타 그래프 S_n은 n-1 가지의 방법으로 n개의 노드 중복 없는 S_{n-1}으로 분할 가능한 재귀적 구조를 갖고 있다. 스타그래프 S_n의 지름은 $\lfloor 3(N-1)/2 \rfloor$이고, 노드 대칭 및 에지 대칭적이고 이분 그래프(bipartite graph)이고, 최대고장 허용도 등 여러 가지 유용한 성질이 있음이 알려졌다(단, $H_N = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}$)[1][8][9][13]. 스타 그래프 S_n은 해밀톤싸이클을 포함할 뿐만 아니라 임의의 에지를 지나는 헤밀톤싸이클이 존재한다. 또한 스타 그래프 S_n은 길이가 짝수 l인 모든 싸이클을 포함하며, 임의의 에지를 지나는 길이 짝수 l인 싸이클을 찾을 수 있다($6 \leq l \leq m!$). 그러나 길이가 홀수인 싸이클은 포함하지 않고, 길이가 4인 싸이클을 포함하지 않기 때문에 어떠한 종류의 메쉬나 하이퍼큐브도 부그래프로 갖지 않는다.



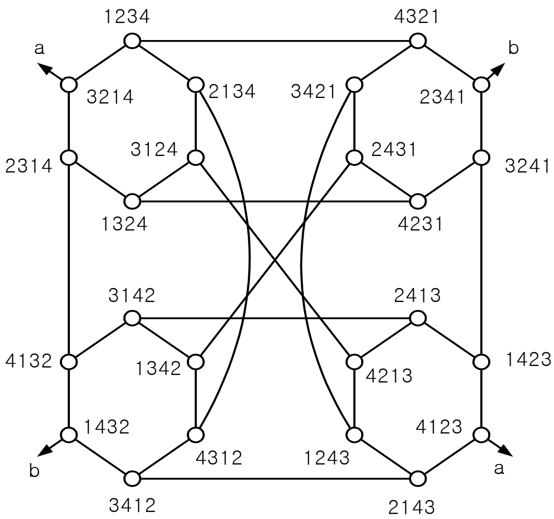
<그림 1> 4 차원 스타 그래프

팬케익(Pancake) 그래프는 P_n은 n!개의 노드와 $n!(n-1)/2$개의 에지로 구성되고 노드 대칭성을 갖는다. 각 노드 주소는 n개의 서로 다른 심볼의 순열로 표현될 수 있고, 노드 v와 연결된 w의 비트 스트링은 노드 v의 순열에서 두 번째 심볼부터 n번째 심볼이 역순으로 교환된 순열을 갖는 노드 v와 w 사이에 에지가 존재한다. n개의 서로 다른 집합 $\langle N\rangle=\{1,2,..,n\}$ 이라 하고, $\langle N\rangle$의 순열 $P=p_1p_2...p_n$, $p_i \in \langle N\rangle$이라 하면 팬케익 그래프 P_n은 다음과 같이 정의된다.

$$V(P_n)=\{(p_1p_2...p_n) \mid p_i \in \langle N\rangle,\ i \neq j,\ p_i \neq p_j\}$$
$$E(P_n)=\{(p_1p_2...p_i...p_n)(p_ip_{i-1}p_{i-2}p_{i-3}...p_2p_1p_{i+1}p_{i+2}...p_n) \mid (p_1p_2...p_i...p_n) \in V(P_n),\ 2 \leq i \leq n\}$$

팬케익 그래프 P_n은 해밀튼 싸이클을 포함하지만, 4-차원 이상의 팬케익 그래프는 길이가 홀수인 싸이클이 존재하기 때문에 이분 그래프(bipartite graph)가 아님이 알려져 있고, 전위합

문제, 정렬(sorting)과 합병(merging) 알고리즘에 대한 연구 결과가 있다. 또한 팬케익(Pancake) 그래프에서 지름, 방송, 병렬 라우팅과 정렬, 임베딩, 부하균등 문제 등 다양한 성질들이 발표되었다[9][14][15]. <그림 2>는 4차원 팬케익 그래프의 예이다.

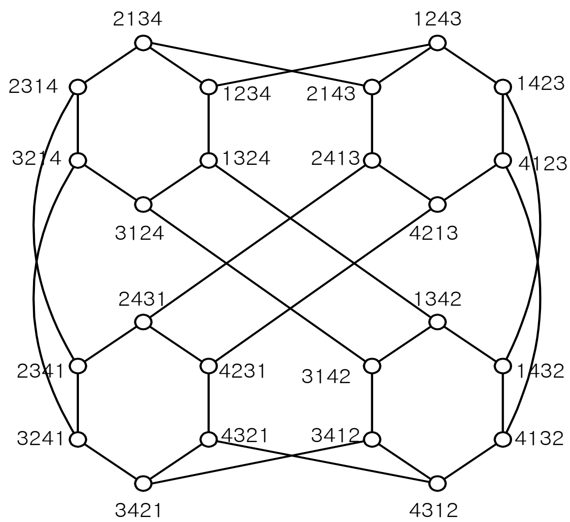


<그림 2> 4 차원 팬케익 그래프

N-차원 버블정렬(Bubblesort) 그래프 B_n은 $n!$개의 노드와 $n!(n-1)/2$개의 에지로 구성된다. 각 노드의 주소는 n개의 서로 다른 심볼의 순열로 표현될 수 있고, 임의의 두 노드 v와 w의 n개 비트 스트링에서 연속된 위치의 두개 심볼이 교환된 순열을 갖는 노드 v와 w 사이에 에지가 존재한다. n개의 서로 다른 심볼 집합 $\langle N \rangle=\{1,2,..,n\}$이라 하고, $\langle N \rangle$의 순열을 $B=b_1b_2...b_n$, $b_i \in \langle N \rangle$이라 할 때, 버블정렬 그래프 B_n은 다음과 같이 정의된다.

$$V(B_n)=\{(b_1b_2...b_n) \mid b_i \in \langle n \rangle,\ i \neq j,\ b_i \neq b_j\}$$
$$E(B_n)=\{(b_1b_2...b_ib_{i+1}...b_n)(b_1b_2...b_{i+1}b_i...b_n) \mid (b_1b_2...b_i...b_n) \in V(B_n),\ 1 \leq i \leq n-1\}$$

n개의 심볼로 구성된 순열 $B=b_1b_2...b_ib_{i+1}...b_n$에서 연속된 위치의 두개 심볼 b_i와 b_{i+1}이 교환된 순열 $b_1b_2...b_{i+1}b_i...b_n$을 연결하는 에지를 i-차원에지라 하고, 임의의 노드에 인접한 i-차원에지 개수는 n-1개이므로 버블정렬 그래프 B_n의 분지수는 n-1인 정규그래프이다. 버블정렬 그래프 B_n의 지름(diameter)은 $n(n-1)/2$이고, 에지를 중심으로 그래프를 분할 할 수 있으므로 계층적 연결망이다. 버블정렬 그래프 B_n은 노드 대칭적이고 에지 대칭적이며, 이분 그래프(bipartite graph)이고 해밀톤 싸이클을 포함하고 있으며, 지금까지 많은 다양한 성질들이 연구되고 있다[3][5][13]. <그림 3>은 4차원 버블정렬 그래프의 예이다.

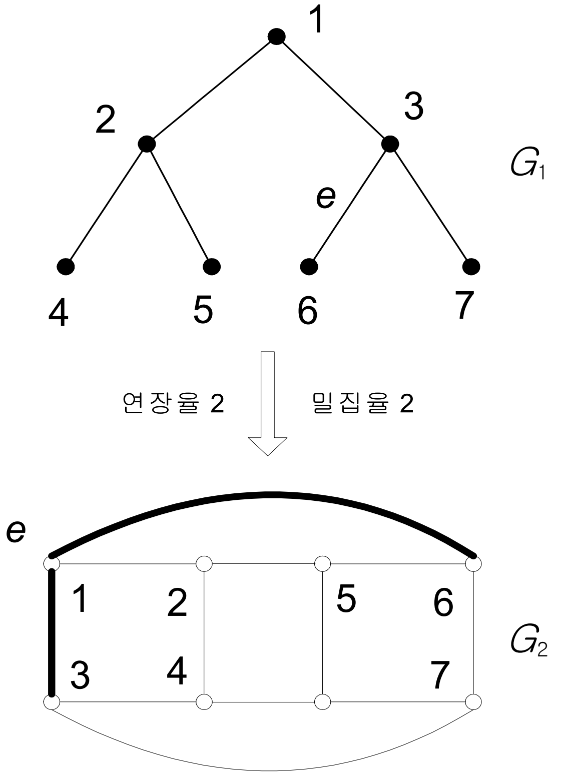


<그림 3> 4 차원 버블정렬 그래프

3. 임베딩 분석

그래프의 임베딩(embedding)은 어떤 그래프 G가 다른 그래프 H 구조에 포함 혹은 어떻게 연관되어 있는지를 알아보기 위해, 어떤 특정한 그래프를 다른 그래프에 사상(mapping)하는 것이다. 그래프 G의 그래프 H에 대한 임베딩 f는 다음과 같이 정의되는 함수의 쌍(ϕ,ρ)을 말한다. ϕ는 G의 정점 집합 V(G)를 H의 정점 집합 V(H)에 대응시키는 함수이고, ρ는 G의 에지 $e=(v,w)$에서 $\phi(v)$와 $\phi(w)$를 잇는 H상의 경로로 대응시키는 함수이

다. 임베딩의 비용을 나타내는 척도는 연장율(dilation), 밀집율(congestion), 확장율(expansion)이 사용되고 있다. 그래프 G의 에지 e의 연장율은 H상에서의 경로 $\rho(e)$의 길이를 말하고, 임베딩 f의 연장율은 G의 모든 에지의 연장율 중 최대값이다. 그래프 H의 에지 e'의 밀집율은 e'에 포함되는 $\rho(e)$의 개수를 말하고, 임베딩 f의 밀집율은 H의 모든 에지의 밀집율 중 최대값이다. 임베딩 f의 확장율은 G의 정점의 개수에 대한 H의 정점의 개수의 비를 말한다.



<그림 4> 그래프 G_1을 G_2로 사상한 예제

예를 들어 <그림 4>에서 그래프 G_1가 G_2로 동일한 노드 번호를 갖는 노드들로 사상되었다고 할 때, 그래프 G_1에서 노드 3과 6을 연결하는 에지는 그래프 G_2에서 에지 (3,1)과 (1,6) 또는 (3,7)과 (7,6)으로 사상되므로 연장율은 2이다. 이때 그래프 G_1에서 노드 3과 6을 연결하는 에지가 그래프 G_2에서 에지 (3,1)과 (1,6)로 사상되었다고 가정하자. 이 경우 임베딩의 밀집율은 그래프 G_2에서 노드 1과 3을 연결하는 에지 e를 그래프 G_1의 2개의 에지 (1,3)과 (3,7)이 경유하므로 밀집율이 2임을 알 수 있고, 확장율은 8/7임을 알 수 있다.

스타그래프 S_n의 노드 $S(=s_1s_2...s_i...s_n)$에서 심볼 s_1과 s_i가 교환된 순열 $s_is_2...s_1...s_n$을 연결하는 에지를 i-차원에지라 하고, 차원에지 S_i, $2 \le i \le n$로 표현하고, 팬케익그래프 P_n의 노드 $P(=p_1p_2...p_i...p_n)$에서 심볼 p_i부터 첫 번째 심볼 p_1까지 역순으로 표현된 순열 $p_ip_{i-1}p_{i-2}...p_1p_{i+1}...p_n$을 연결하는 에지를 i-차원에지라 하고, 차원에지 P_i, $2 \le i \le n$로 표현한다. 버블정렬그래프 B_n의 노드 $B(=b_1b_2...b_ib_{i+1}...b_n)$에서 인접한 2개의 심벌 b_i과 b_{i+1}이 교환된 순열 $b_1b_2...b_{i+1}b_i...b_n$을 연결하는 에지를 i-차원에지라 하고, 차원에지 B_i, $1 \le i \le n-1$로 표현한다.

스타그래프 S_n의 임의의 노드 U에서 차원에지 S_i에 인접한 노드를 V라 할 때, 노드 V는 다음과 같이 $V=S_i(U)$로 표현한다. 또한, 노드 U에서 스타그래프의 차원에지 S_i, S_j, S_k를 순차적으로 적용하여 도달한 노드를 V라 할 때, 차원에지를 순차적으로 적용한다는 것은 첫 번째 단위시간에는 노드 U에서 차원에지 S_i에 의해 인접한 노드 $S_i(U)$의 순열을 생성함을 의미하고, 두 번째 단위시간에는 노드 $S_i(U)$에서 차원에지 S_j에 인접한 노드 $S_j(S_i(U))$를 생성함을 의미하고, 세 번째 단위시간에는 순열 $S_j(S_i(U))$에서 차원에지 S_k에 인접한 순열 $S_k(S_j(S_i(U)))$에 도달함을 의미하고 노드 $V=S_k(S_j(S_i(U)))$를 의미한다. 이와 같이 노드 U에 차원에지 S_i, S_j, S_k를 순차적으로 적용하여 도달한 노드 $V=S_k(S_j(S_i(U)))$로 표현하고, 순열 $S_k(S_j(S_i(U)))$는 간단히 $S_kS_jS_i(\mathrm{U})$로 표기한다. 노드 U에 순차적으로 적용된 차원에지를 차원에지 시퀀스 $<S_i, S_j, S_k>$로 나타낸다. 위의 차원에지와 차원에지 시퀀스는 팬케익그래프 P_n와 버블정렬그래프 B_n에서 동일하게 적용된다.

본 연구에서 적용하는 임베딩의 기본 방법은 다음과 같다. 스타그래프 S_n와 팬케익그래프 P_n 그리고 버블정렬그래프 B_n에서 노드 사상은 동일한 주소를 갖는 노드로 일-대-일 사상한다. 사상

할 그래프의 인접한 두 노드 (U,V)를 연결하는 차원에지는 사상된 그래프의 에지 정의를 이용하여 ø(U)와 ø(V)를 연결하는 최단경로(the shortest path)의 차원에지 시퀀스로 나타내고, 임베딩의 연장율은 차원에지 시퀀스의 개수로 나타낸다.

정리 1 버블정렬(Bubblesort) 그래프 B_n을 팬케익 그래프 P_n에 연장비율 3, 확장비율 1에 임베딩 가능하다.

증명 $n!$개의 노드를 갖는 버블정렬그래프 B_n와 팬케익그래프 P_n의 노드는 동일한 주소를 갖는 노들로 일대일 사상 가능하다. 두 그래프의 노드를 사상하는 방법은 버블정렬그래프 B_n의 노드 $B(=b_1b_2...b_i...b_n)$를 팬케익그래프 P_n의 노드 $P(=p_1p_2...p_i...p_n)$로 사상하고, 버블정렬그래프의 노드 B와 i-차원에지에 의해 연결된 노드 B'를 팬케익그래프 P_n의 노드 P'로 사상한다. 임베딩의 연장율을 분석하기 위해 버블정렬그래프의 에지를 차원에지의 경우로 나누고, 버블정렬그래프의 노드 B와 B'가 사상된 팬케익 그래프의 노드 P와 P'에서 노드 P의 주소로부터 노드 P'의 주소를 생성하기 위해 필요한 에지 개수를 통해 연장율을 분석한다. 버블정렬그래프의 차원에지는 i에 따라 3가지 경우로 나누어 증명한다.

경우 1. i=1 차원에지

버블정렬그래프 B_n의 노드 $B(=b_1b_2b_3...b_i...b_n)$와 1-차원에지에 의해 인접한 노드 B'의 순열은 $b_2b_1b_3...b_i...b_n$이다. 팬케익그래프 P_n의 노드 $P(=p_1p_2p_3...p_i...p_n)$는 노드 $P'(=p_2p_1p_3...p_i...p_n)$와 2-차원에지에 의해 인접한 노드이다. 따라서 버블정렬그래프 B_n의 노드 B와 1-차원에지에 인접한 노드 B'는 팬케익그래프 P_n의 노드 P와 P'로 연장율 1에 임베딩 가능하다.

예제 1) 노드 B=1234, B'=2134일 때, P=1234, P'=2134이므로 연장율 1로 임베딩 가능하다.

경우 2. i=2 차원에지

버블정렬그래프 B_n의 노드 $B(=b_1b_2b_3...b_i...b_n)$와 2-차원에지에 의해 인접한 노드 $B'(=b_1b_3b_2b_4...b_i...b_n)$이다. 팬케익그래프 P_n의 노드 $P(=p_1p_2p_3...p_i...p_n)$는 노드 $P'(=p_1p_3p_2p_4...p_i...p_n)$와 인접하지 않다. 팬케익그래프의 노드 $P(=p_1p_2p_3...p_i...p_n)$에서 노드 $P'(=p_1p_3p_2p_4...p_i...p_n)$까지 최단경로 라우팅을 위해 이용하는 에지 개수를 통해 연장율을 분석한다. 노드 $P(=p_1p_2p_3...p_i...p_n)$에서 P′까지의 라우팅을 위한 차원에지의 시퀀스는 $<P_2, P_3, P_2>$이다. 노드 $P(=p_1p_2p_3...p_i...p_n)$에서 차원에지 P_2에 의해 인접한 노드는 $P_2(P)=p_2p_1p_3p_4...p_i...p_n$이고, 노드 $P_2(P)$에서 차원에지 P_3에 인접한 노드는 $P_3P_2(P)=p_3p_1p_2p_4...p_i...p_n$이고, 노드 $P_3P_2(P)$에서 차원에지 P_2에 의해 인접한 노드는 $P_2P_3P_2(P)=p_1p_3p_2p_4...p_i...p_n$이다. 따라서 팬케익그래프의 노드 $P(=p_1p_2p_3...p_i...p_n)$에서 차원에지 시퀀스 $<P_2, P_3, P_2>$를 적용한 노드 $P_2P_3P_2(P)=p_1p_3p_2p_4...p_i...p_n$는 노드 P'와 동일한 주소를 가짐을 알 수 있으므로, 버블정렬그래프 B_n의 노드 $B(=b_1b_2b_3...b_i...b_n)$와 2-차원에지에 인접한 노드 B'는 팬케익그래프에 연장율 3에 임베딩 가능하다.

예제 2) 노드 B=1234, B'=1324일 때, P=1234, $P_2(P)$=2134, $P_3P_2(P)$=3124, $P_2P_3P_2(P)$=1324이므로 연장율 3에 임베딩 가능하다.

경우 3. $i \geq 3$ 차원에지

버블정렬그래프 B_n의 노드 $B(=b_1b_2b_3...b_{i-1}b_ib_{i+1}b_{i+2}...b_n)$와 i-차원에지에 의해 인접한 노드 B'의 순열은 $b_1b_2b_3...b_{i-1}b_{i+1}b_ib_{i+2}...b_n$이다. 팬케익그래프 P_n의 노드 $P(=p_1p_2p_3...p_{i-1}p_{i+1}p_ip_{i+2}...p_n)$는 노드 $P'(=p_1p_2p_3...p_{i-1}p_{i+1}p_ip_{i+2}...p_n)$와 인접한 노드가 아니므로 노드 $P(=p_1p_2p_3...p_{i-1}p_{i+1}p_ip_{i+2}...p_n)$에서 노드 $P'(=p_1p_2p_3...p_{i-1}p_{i+1}p_ip_{i+2}...p_n)$까지 최단경로 라우팅을 위해 이용하는 차원에지 개수를 통해 연장율을 분석한다. 팬케익그래프의 노드 P에서 P'까지 최적 라우팅을 위한 차원에지 시퀀스는 $<P_{i+1}, P_2,$

P_{i+1}>이고, 라우팅 과정은 다음과 같다. 노드 $P(=p_1p_2p_3...p_{i-1}p_{i+1}p_ip_{i+2}...p_n)$에서 차원에지 P_{i+1}에 의해 인접한 노드 $P_{i+1}(P)=p_{i+1}p_ip_{i-1}...p_3p_2p_1p_{i+2}...p_n$이고, 노드 P_{i+1}(P)에서 차원에지 P_2에 의해 인접한 노드 $P_2P_{i+1}(P)=p_ip_{i+1}p_{i-1}...p_3p_2p_1p_{i+2}...p_n$이고, 노드 $P_2P_{i+1}(P)$에서 차원에지 P_{i+1}에 의해 인접한 노드 $P_{i+1}P_2P_{i+1}(P)=p_1p_2p_3...p_{i-1}p_{i+1}p_ip_{i+2}...p_n$이다. 따라서 팬케익그래프의 노드 $P(=p_1p_2p_3...p_{i-1}p_{i+1}p_ip_{i+2}...p_n)$에서 차원에지 시퀀스는 <$P_{i+1}$, P_2, P_{i+1}>를 경유한 노드 $P_{i+1}P_2P_{i+1}(P)$의 순열은 노드 $P'(=p_1p_2p_3...p_{i-1}p_{i+1}p_ip_{i+2}...p_n)$와 동일함을 알 수 있다. 결국 버블정렬그래프 B_n의 노드 $B(=b_1b_2b_3...b_{i-1}b_ib_{i+1}b_{i+2}...b_n)$에서 3-차원 이상의 에지에 인접한 노드 B'는 팬케익 그래프 P_n의 노드 P에서 3개의 에지시퀀스 <P_{i+1}, P_2, P_{i+1}>을 순차적으로 적용하여 구성한 노드 $P_{i+1}P_2P_{i+1}(P)$로 사상되므로 연장율 3에 임베딩 가능하다.

예제 3) 노드 B=1234, B'=1243일 때, P=1234이고, i=3, i+1=4이다. $P_4(P)$=4321, $P_2P_4(P)$=3421, $P_4P_2P_4(P)$=1243이므로 연장율 3에 임베딩 가능하다.

정리 2 팬케익그래프 P_n을 버블정렬그래프 B_n에 임베딩 하는 연장율 비용이 $O(n^2)$이다.

증명 팬케익그래프 P_n의 노드 $P(=p_1p_2p_3...p_{i-1}p_ip_{i+1}p_{i+2}...p_n)$에서 i-차원에지에 의해 인접한 노드 P'의 순열은 $p_ip_{i-1}p_{i-2}...p_3p_2p_1p_{i+1}...p_n$이다. 팬케익그래프 P_n의 노드 P와 P'가 사상된 버블정렬그래프 B_n의 노드 $B(=b_1b_2b_3...b_{i-1}b_ib_{i+1}b_{i+2}...b_n)$와 노드 $B'(=b_ib_{i-1}b_{i-2}...b_3b_2b_1b_{i+1}...b_n)$는 서로 인접하지 않으므로, 노드 B의 순열을 노드 B'의 순열로 변환하는데 적용되는 차원에지의 최대 개수를 통해 연장율을 분석한다. 팬케익그래프 P_n의 노드 $P(=p_1p_2p_3...p_{i-1}p_ip_{i+1}p_{i+2}...p_n)$에서 n-차원에지에 의해 인접한 노드 $P'(=p_np_{n-1}p_{n-2}...p_{i+1}p_ip_{i-1}...p_3p_2p_1)$의 경우가 최대 연장율을 갖는 경우로서 대략 n^2임을 통해 임베딩 비용이 $O(n^2)$임을 분석한다.

버블정렬그래프 B_n의 노드 $B(=b_1b_2b_3...b_{i-1}b_ib_{i+1}b_{i+2}...b_n)$의 순열에서 노드 $B'(=b_ib_{i-1}b_{i-2}...b_3b_2b_1b_{i+1}...b_n)$의 순열을 만드는 것은 오름차순으로 정렬된 심벌을 갖는 노드 $B(=b_1b_2b_3...b_{i-1}b_ib_{i+1}b_{i+2}...b_n)$의 순열에서 첫 번째 심벌 b_1부터 b_i까지 내림차순으로 정렬하는 것과 동일하다. 즉 노드 B의 첫 번째 심벌 b_1을 i번째 위치에 두는데 필요한 에지 시퀀스는 <1, 2, 3, ..., i-1>이므로 i-1개의 에지가 필요하고, 노드 B의 두 번째 심벌 b_2을 (i-1)번째 위치에 두는데 필요한 에지 시퀀스는 <1, 2, 3, ..., i-2>이므로 i-2개의 에지가 필요하다. 위의 과정을 일반화하였을 때, 노드 B의 순열을 노드 B'의 순열로 변환하는데 필요한 에지의 전체 개수는 (i-1)+(i-2)+(i-3)+...+1으로, 연장율의 합을 수식으로 나타내면 $\sum_{i=1}^{n}\frac{i\times(i+1)}{2}-1=\frac{n^2+n-2}{2}$이다. 따라서 임베딩 비용이 $O(n^2)$임을 알 수 있다.

정리 3 버블정렬(Bubblesort) 그래프 B_n을 스타그래프 S_n에 연장율 3, 확장율 1에 임베딩 가능하다.

증명 버블정렬그래프 B_n의 노드 $B(=b_1b_2b_3...b_{i-1}b_ib_{i+1}b_{i+2}...b_n)$와 i-차원에지에 의해 연결된 노드 $B'(=b_1b_2b_3...b_{i-1}b_{i+1}b_i...b_n)$를 스타그래프 S_n의 노드 $S(=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_is_{i+1}s_{i+2}...s_n)$와 노드 $S'(=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_{i+1}s_i...s_n)$로 각각 사상할 때 노드 S와 S'는 서로 인접하지 않으므로, 스타그래프 S_n의 노드 S의 순열로부터 노드 S'의 순열로 변환할 때 까지 적용하는 스타그래프의 에지시퀀스 개수를 통해 연장율을 분석한다.

스타 그래프 S_n의 노드 $S(=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_is_{i+1}s_{i+2}...s_n)$ 순열에서 노드 $S'(=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_{i+1}s_i...s_n)$까지 라우팅을 위한 최단 경로의 에지시퀀스는 <S_{i+1}, S_i, S_{i+1}>이다. 스타그래프에서 에지시퀀스를 이용한 라우팅 과정은 다음과 같다. 스타그래프 S_n의 노드 $S(=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_is_{i+1}s_{i+2}...s_n)$에서 차원에지 S_{i+1}에 의해 인접한 노드의 순열은 $S_{i+1}(S)=s_{i+1}s_2s_3...s_{i-1}s_is_1s_{i+2}...s_n$이고, 노드 $S_{i+1}(S)$에서 차원에지 S_i에 의해

인접한 노드의 순열은 $S_iS_{i+1}(S)$=$s_is_2s_3...s_{i-1}s_{i+1}s_1s_{i+2}...s_n$이다. 노드 $S_iS_{i+1}(S)$에서 차원에지 S_{i+1}에 의해 인접한 노드의 순열은 $S_{i+1}S_iS_{i+1}(S)$=$s_1s_2s_3...s_{i-1}s_{i+1}s_is_{i+2}...s_n$이므로 스타 그래프 S_n의 노드 S'와 노드의 순열 $S_{i+1}S_iS_{i+1}(S)$는 동일한 주소를 가짐을 알 수 있고, 노드 S에서 노드 S'까지 라우팅을 위해 필요한 차원에지 개수는 3개이다. 따라서 버블정렬그래프 B_n의 노드 $B(=b_1b_2b_3...b_{i-1}b_ib_{i+1}b_{i+2}...b_n)$와 노드 $B'(=b_1b_2b_3...b_{i-1}b_{i+1}b_i...b_n)$를 스타그래프 S_n의 노드 $S(=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_is_{i+1}s_{i+2}...s_n)$와 노드 $S'(=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_{i+1}s_i...s_n)$로 각각 사상할 때 연장율은 3이다.

예제) 노드 B=1234, B'=1243일 때, S=1234이고, i=3, i+1=4이다. $S_4(S)$=4231, $S_3S_4(S)$=3241, $S_4S_3S_4(S)$=1243이므로 연장율 3에 임베딩 가능하다.

정리 4 스타그래프 S_n을 버블정렬(Bubblesort) 그래프 B_n으로 임베딩하는데 연장율 비용이 $O(n)$이다.

증명 스타그래프 S_n의 노드 $S(=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_is_{i+1}s_{i+2}...s_n)$와 i-차원에지 S_i에 의해 인접한 노드 S'의 순열은 $s_is_2s_3...s_{i-1}s_1s_{i+1}s_{i+2}...s_n$이다($2 \le i \le n$). 스타그래프 S_n의 노드 S를 버블정렬그래프 B_n의 노드 $B(=b_1b_2b_3...b_{i-1}b_ib_{i+1}b_{i+2}...b_n)$로 사상하고 노드 S'를 노드 B'로 사상할 때, 노드 $B(=b_1b_2b_3...b_{i-1}b_ib_{i+1}b_{i+2}...b_n)$에서 노드 $B'(=b_ib_2b_3...b_{i-1}b_1b_{i+1}b_{i+2}...b_n)$까지 최단경로 라우팅을 위해 적용해야 할 차원에지의 개수가 $c \times n$임을 통해 임베딩의 연장율 비용이 $O(n)$임을 보인다(c는 상수).

최단경로 라우팅 개요는 다음과 같다. 버블정렬그래프 B_n의 노드 $B(=b_1b_2b_3...b_{i-1}b_ib_{i+1}b_{i+2}...b_n)$에서 먼저 첫 번째 위치에 있는 심벌 b_1을 인접한 심벌들과 계속 교환하여 i번째 위치로 이동하고, i번째 위치에 있는 심벌 b_i를 인접한 심벌들과 교환하여 첫 번째 위치로 이동한다. 위 작업을 위해 라우팅에 적용되는 에지시퀀스는 $<B_1, B_2, B_3, ..., B_{i-2}, B_{i-1}, B_{i-2}, ..., B_2, B_1>$이다. 노드 $B(=b_1b_2b_3...b_{i-1}b_ib_{i+1}b_{i+2}...b_n)$에서 에지시퀀스 $<B_1, B_2, B_3, ..., B_{i-2}, B_{i-1}>$을 순차적으로 적용하면 심벌 b_1을 인접한 i-1개의 심벌들과 순차적으로 교환하여 심벌 b_1는 i번째에 위치되고, 그 순열은 $B_{i-1}B_{i-2}...B_2B_1(B)$=$b_2b_3...b_{i-1}b_ib_1b_{i+1}...b_n$이다. 그리고 순열 $B_{i-1}B_{i-2}...B_2B_1(B)$=$b_2b_3...b_{i-1}b_ib_1b_{i+1}...b_n$에서 심벌 b_i는 (i-1)번째 위치에 있으므로, 순열 $B_{i-1}B_{i-2}...B_2B_1(B)$에 에지시퀀스 $<B_{i-2}, B_{i-3}, ..., B_2, B_1>$을 순차적으로 적용하면 심벌 b_i는 i-2개의 인접한 심벌들과 교환하여 순열의 첫 번째 위치에 심벌 b_i을 위치한 순열 $B_1B_2B_3...B_{i-3}B_{i-2}(B_{i-1}B_{i-2}...B_2B_1(B))$=$b_ib_2b_3...b_{i-1}b_1b_{i+1}...b_n$을 갖는다. 따라서 스타 그래프 S_n의 노드 $S(=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_is_{i+1}s_{i+2}...s_n)$와 i-차원에지 S_i에 의해 인접한 노드 S'의 순열 중 차원에지가 가장 큰 값은 n-차원에지이므로, 스타 그래프 S_n의 노드 $S(=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_is_{i+1}s_{i+2}...s_n)$와 노드 S'가 사상된 버블정렬 그래프의 노드 $B(=b_1b_2b_3...b_{i-1}b_ib_{i+1}b_{i+2}...b_n)$에서 노드 B'까지 라우팅을 위해 적용되는 차원에지 개수는 $2n$-3개이므로 연장율은 $O(n)$이다($2 \le i \le n$).

정리 5 n-차원 스타 그래프 S_n을 n-차원 팬케익 그래프 P_n으로 연장율 4, 확장율 1에 임베딩 가능하다.

증명 스타 그래프 S_n의 노드 $S(=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_is_{i+1}s_{i+2}...s_n)$와 i-차원에지 S_i에 의해 인접한 노드 S'의 순열은 $s_is_2s_3...s_{i-1}s_1s_{i+1}s_{i+2}...s_n$이다($2 \le i \le n$). 스타그래프 S_n의 노드 S를 팬케익그래프 P_n의 노드 $P(=p_1p_2p_3...p_{i-1}p_ip_{i+1}p_{i+2}...p_n)$로 사상하고, 스타그래프의 노드 S'를 팬케익그래프의 노드 P'로 사상할 때 노드 $P(=p_1p_2p_3...p_{i-1}p_ip_{i+1}p_{i+2}...p_n)$에서 노드 $P'(=p_ip_2p_3...p_{i-1}p_1p_{i+1}p_{i+2}...p_n)$까지 최단경로 라우팅을 위해 적용해야 할 차원에지의 개수를 통해 임베딩의 연장율을 분석한다.

팬케익그래프 P_n의 노드 $P(=p_1p_2p_3...p_{i-1}p_ip_{i+1}p_{i+2}...p_n)$는 노드 $P'(=p_ip_2p_3...p_{i-1}p_1p_{i+1}p_{i+2}...p_n)$와 인접하지 않으므로 노드 P의 순열에 팬케익 그래프의

차원에지를 순차적으로 적용하여 노드 P'까지 도달할 수 있는 에지시퀀스를 구한다. 스타그래프의 i-차원에지를 4가지 경우로 나누어 증명한다.

경우 1. $2 \le i \le 3$-차원에지

스타그래프 S_n의 노드 $S(=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_is_{i+1}s_{i+2}...s_n)$와 2-차원에지 S_2에 의해 인접한 노드 S'의 순열은 $s_2s_1s_3...s_{i-1}s_is_{i+1}s_{i+2}...s_n$이다. 팬케익그래프 P_n의 노드 $P(=p_1p_2p_3...p_{i-1}p_ip_{i+1}p_{i+2}...p_n)$는 노드 $P'(=p_2p_1p_3...p_{i-1}p_ip_{i+1}p_{i+2}...p_n)$와 2-차원에지 P_2에 의해 인접하므로, 스타그래프 S_n에서 노드 S와 2-차원에지에 의해 인접한 노드 S'는 팬케익 그래프에서 연장율 1로 사상된다. 또한, 스타그래프 S_n의 노드 $S(=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_is_{i+1}s_{i+2}...s_n)$와 3-차원에지 S_3에 의해 인접한 노드 S'의 순열은 $s_3s_2s_1...s_{i-1}s_is_{i+1}s_{i+2}...s_n$이다. 팬케익그래프 P_n의 노드 $P(=p_1p_2p_3...p_{i-1}p_ip_{i+1}p_{i+2}...p_n)$는 노드 $P'(=p_2p_1p_3...p_{i-1}p_ip_{i+1}p_{i+2}...p_n)$와 3-차원에지 P_3에 의해 인접하므로, 스타그래프 S_n에서 노드 S와 3-차원에지에 의해 인접한 노드 S'는 팬케익 그래프에서 연장율 1로 사상된다.

예제 1) 노드 S=123456, S'=321456일 때, P=123456이고, i=3이며, P'=321456이므로 연장율 1에 임베딩 가능하다.

경우 2. i=4-차원에지

스타그래프 S_n의 노드 $S(=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_is_{i+1}s_{i+2}...s_n)$와 4-차원에지 S_4에 의해 인접한 노드 S'의 순열은 $s_4s_2s_3s_1...s_{i-1}s_is_{i+1}s_{i+2}...s_n$이다. 스타그래프 S_n의 노드 S를 팬케익그래프 P_n의 노드 $P(=p_1p_2p_3p_4p_5...p_{i-1}p_ip_{i+1}...p_n)$로 사상하고, 스타그래프의 노드 S'를 팬케익그래프의 노드 $P'(=p_4p_2p_3p_1p_5...p_{i-1}p_ip_{i+1}...p_n)$로 사상할 때, 노드 $P(=p_1p_2p_3p_4p_5...p_{i-1}p_ip_{i+1}...p_n)$에서 노드 $P'(=p_4p_2p_3p_1p_5...p_{i-1}p_ip_{i+1}...p_n)$까지 최단경로 라우팅을 위해 적용해야 할 팬케익그래프의 차원에지 시퀀스는 <P_4, P_3, P_2, P_3>이다. 팬케익그래프 P_n에서 위의 차원에지 시퀀스를 순차적으로 적용하여 노드 $P(=p_1p_2p_3p_4p_5...p_{i-1}p_ip_{i+1}...p_n)$에서 노드 $P'(=p_4p_2p_3p_1p_5...p_{i-1}p_ip_{i+1}...p_n)$까지 순열의 변화 과정을 살펴보자. 노드 $P(=p_1p_2p_3p_4p_5...p_{i-1}p_ip_{i+1}...p_n)$에서 차원에지 P_4에 의해 인접한 순열은 $P_4(P)=p_4p_3p_2p_1p_5...p_{i-1}p_ip_{i+1}...p_n$이고, 순열 $P_4(P)$에서 차원에지 P_3에 의해 인접한 순열은 $P_3P_4(P)=p_2p_3p_4p_1p_5...p_{i-1}p_ip_{i+1}...p_n$이고, 순열 $P_3P_4(P)$에서 차원에지 P_2에 의해 인접한 순열은 $P_2P_3P_4(P)=p_3p_2p_4p_1p_5...p_{i-1}p_ip_{i+1}...p_n$이고, 순열 $P_2P_3P_4(P)$에서 차원에지 P_3에 의해 인접한 순열은 $P_3P_2P_3P_4(P)=p_4p_2p_3p_1p_5...p_{i-1}p_ip_{i+1}...p_n$이다. 팬케익그래프 P_n의 노드 $P(=p_1p_2p_3p_4p_5...p_{i-1}p_ip_{i+1}...p_n)$에서 차원에지시퀀스 <$P_4$, P_3, P_2, P_3>를 순차적으로 적용한 순열 $P_3P_2P_3P_4(P)=p_4p_2p_3p_1p_5...p_{i-1}p_ip_{i+1}...p_n$는 스타 그래프 S_n의 노드 S'와 동일한 순열을 가지므로, 스타그래프 S_n의 노드 S와 4-차원에지 S_4에 의해 인접한 노드 S'는 팬케익 그래프에서 연장율 4에 임베딩 가능함을 알 수 있다.

예제 2) 노드 S=123456, S'=423156일 때, P=123456이고, i=4이다. $P_4(P)$=432156, $P_3P_4(P)$=234156, $P_2P_3P_4(P)$=324156, $P_3P_2P_3P_4(P)$=423156이므로 연장율 4에 임베딩 가능하다.

경우 3. $5 \le i \le (n-1)$-차원에지

스타그래프 S_n의 노드 $S(=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_is_{i+1}s_{i+2}...s_n)$와 차원에지 S_i에 의해 인접한 노드 S'의 순열은 $s_is_2s_3...s_{i-1}s_1s_{i+1}s_{i+2}...s_n$이다. 스타그래프 S_n의 노드 $S(=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_is_{i+1}s_{i+2}...s_n)$와 노드 $S'(=s_is_2s_3...s_{i-1}s_1s_{i+1}s_{i+2}...s_n)$가 팬케익그래프의 노드 $P(=p_1p_2p_3...p_{i-1}p_ip_{i+1}...p_n)$와 노드 $P'(=p_ip_2p_3...p_{i-1}p_1p_{i+1}...p_n)$로 각각 사상 되었을 때, 팬케익그래프의 노드 $P(=p_1p_2p_3...p_{i-1}p_ip_{i+1}...p_n)$에서 노드 $P'(=p_ip_2p_3...p_{i-1}p_1p_{i+1}...p_n)$까지 최단경로 라우팅을 위해 적용해야 할 팬케익그래프의 차원에지 시퀀스는 <P_{i-1}, P_{i-2}, P_{i-1}, P_i>이다. 팬케익그래프 P_n에서 위의 차원에지 시퀀스를 순차적으로 적용하여 노드 $P(=p_1p_2p_3...p_{i-1}p_ip_{i+1}...p_n)$에서 노드 $P'(=p_ip_2p_3...p_{i-1}p_1p_{i+1}...p_n)$까

지 순열의 변화 과정을 살펴보자. 노드 $P(=p_1p_2p_3...p_{i-1}p_ip_{i+1}...p_n)$에서 차원에지 P_{i-1}에 의해 인접한 순열은 $P_{i-1}(P)=p_{i-1}p_{i-2}p_{i-3}...\ p_3p_2p_1p_ip_{i+1}...p_n$이고, 순열 $P_{i-1}(P)$에서 차원에지 P_{i-2}에 의해 인접한 순열은 $P_{i-2}P_{i-1}(P)=p_2p_3p_4...p_{i-2}p_{i-1}p_1p_ip_{i+1}...p_n$이고, 순열 $P_{i-2}P_{i-1}(P)$에서 차원에지 P_{i-1}에 의해 인접한 순열은 $P_{i-1}P_{i-2}P_{i-1}(P)=p_1p_{i-1}p_{i-2}p_{i-3}...p_4p_3p_2p_ip_{i+1}...p_n$이고, 순열 $P_{i-1}P_{i-2}P_{i-1}(P)$에서 차원에지 P_i에 의해 인접한 순열은 $P_iP_{i-1}P_{i-2}P_{i-1}(P)=p_ip_2p_3p_4...p_{i-2}p_{i-1}p_1p_{i+1}...p_n$이다. 팬케익그래프 P_n의 노드 $P(=p_1p_2p_3...p_{i-1}p_ip_{i+1}...p_n)$에서 차원에지시퀀스 <$P_{i-1}$, P_{i-2}, P_{i-1}, P_i>를 순차적으로 적용한 순열 $P_iP_{i-1}P_{i-2}P_{i-1}(P)=p_ip_2p_3p_4...p_{i-2}p_{i-1}p_1p_{i+1}...p_n$는 스타그래프 S_n의 노드 S'와 동일한 순열을 가지므로, 스타그래프 S_n의 노드 S와 i-차원에지 S_i에 의해 인접한 노드 S'는 팬케익그래프에서 연장율 4에 임베딩 가능함을 알 수 있다($5 \leq i \leq (n-1)$).

예제 3) 노드 S=123456, S'=523416일 때, P=123456이고, i=5, $i-1$=4, $i-2$=3이다. $P_4(P)$=432156, $P_3P_4(P)$=234156, $P_4P_3P_4(P)$=143256, $P_5P_2P_3P_4(P)$=523416이므로 연장율 3에 임베딩 가능하다.

경우 4. i=n-차원 에지

스타그래프 S_n의 노드 $S(=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_is_{i+1}s_{i+2}...s_n)$와 n-차원에지에 의해 인접한 노드 S'의 순열은 $s_ns_2s_3...s_{i-1}s_is_{i+1}s_{i+2}...s_1$이다. 스타그래프 S_n의 노드 S를 팬케익그래프 P_n의 노드 $P(=p_1p_2p_3...p_{i-1}p_ip_{i+1}...p_n)$로 사상하고, 스타그래프의 노드 S'를 팬케익그래프의 노드 $P'(=p_np_2p_3...p_{i-1}p_ip_{i+1}...p_1)$로 사상할 때 노드 $P(=p_1p_2p_3...p_{i-1}p_ip_{i+1}...p_n)$에서 노드 $P'(=p_np_2p_3...p_{i-1}p_ip_{i+1}...p_1)$까지 최단경로 라우팅을 위해 적용해야 할 팬케익그래프의 차원에지 시퀀스는 <P_n, P_{n-1}, P_{n-2}, P_{n-1}>이다. 팬케익그래프 P_n의 노드 $P(=p_1p_2p_3...p_{i-1}p_ip_{i+1}...p_n)$에서 차원에지 시퀀스 <$P_n$, P_{n-1}, P_{n-2}, P_{n-1}>에 의해 노드 $P'(=p_np_2p_3...p_{i-1}p_ip_{i+1}...p_1)$ 순열을 생성할 수 있음을 보인다. 노드 $P(=p_1p_2p_3...p_{i-1}p_ip_{i+1}...p_n)$에서 차원에지 P_n에 의해 인접한 순열은 $P_n(P)=p_np_{n-1}...p_i...p_3p_2p_1$이고, 순열 $P_n(P)$에서 차원에지 P_{n-1}에 의해 인접한 순열은 $P_{n-1}P_n(P)=p_2p_3...p_{i-1}p_ip_{i+1}...p_np_1$이고, 순열 $P_{n-1}P_n(P)$에서 차원에지 P_{n-2}에 의해 인접한 순열은 $P_{n-2}P_{n-1}P_n(P)=p_{n-1}...p_i...p_4p_3p_2p_np_1$이고, 순열 $P_{n-2}P_{n-1}P_n(P)$에서 차원에지 P_{n-1}에 의해 인접한 순열은 $P_{n-1}P_{n-2}P_{n-1}P_n(P)=p_np_2p_3...p_{i-1}p_ip_{i+1}...p_1$이다. 그러므로 팬케익그래프 P_n의 노드 $P(=p_1p_2p_3...p_{i-1}p_ip_{i+1}...p_n)$에서 차원에지시퀀스 <$P_n$, P_{n-1}, P_{n-2}, P_{n-1}>를 순차적으로 적용한 순열 $P_{n-1}P_{n-2}P_{n-1}P_n(P)=p_np_2p_3...p_{i-1}p_ip_{i+1}...p_1$는 스타그래프 S_n의 노드 S'와 동일한 순열을 가지므로, 스타그래프 S_n의 노드 S와 n-차원에지 S_n에 의해 인접한 노드 S'는 팬케익그래프에서 연장율 4에 임베딩 가능함을 알 수 있다.

예제 4) 노드 S=123456, S'=623451일 때, P=123456이고, n=6, $n-1$=5, $n-2$=4이다. $P_6(P)$=654321, $P_5P_6(P)$=234561, $P_4P_5P_6(P)$=543261, $P_5P_4P_5P_6(P)$=623451이므로 연장율 3에 임베딩 가능하다.

정리 6 팬케익그래프 P_n을 스타그래프 S_n으로 임베딩하는 연장율 비용은 $O(n)$이다.

증명 팬케익그래프의 노드 $P(=p_1p_2p_3...p_{i-1}p_ip_{i+1}...p_n)$와 i-차원에지에 의해 인접한 노드 $P'(=p_ip_{i-1}p_{i-2}...p_3p_2p_1...p_n)$가 스타그래프 S_n의 노드 $S(=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_is_{i+1}...s_n)$와 노드 $S'(=s_is_{i-1}s_{i-2}...s_3s_2s_1...s_n)$로 각각 사상 되었을 때, 스타그래프 노드 $S(=s_1s_2s_3...s_{i-1}s_is_{i+1}...s_n)$에서 노드 $S'(=s_is_{i-1}s_{i-2}...s_3s_2s_1...s_n)$까지 최단경로 라우팅을 위해 적용할 차원에지의 개수를 통해 연장율이 $O(n)$임을 보이도록 한다.

본 증명에서는 연장율이 최대를 갖는 경우로서 팬케익그래프의 노드 $P(=p_1p_2p_3...p_{i-1}p_ip_{i+1}...p_n)$와 n-차원에지에 의해 인접한 노드 $P'(=p_np_{n-1}p_{n-2}...p_i...p_3p_2p_1)$가 스타그래프 노드 S와 노드 S'로 사상된 경우를 통해 연장율이 최대값을 가짐을 증명한다. 스타그래프로 사상된 노드 S' 순열은

$s_n s_{n-1} s_{n-2} \ldots s_i \ldots s_3 s_2 s_1$으로서 노드 $S(=s_1 s_2 s_3 \ldots s_{i-1} s_i s_{i+1} \ldots s_n)$를 구성하는 순열의 심벌이 오름차순인데 비해 노드 S'의 순열은 심벌이 내림차순으로 정렬되어 있음을 알 수 있다. 결국 스타그래프의 노드 $S(=s_1 s_2 s_3 \ldots s_{i-1} s_i s_{i+1} \ldots s_n)$에서 노드 S'로의 순열을 변경하는 문제는 노드 S에서 노드 S'로 최단 경로 라우팅에 사용되는 에지의 개수를 구하는 문제와 같다. 따라서 스타그래프 S_n의 임의의 두 노드간에 라우팅을 위한 값은 지름과 동일한 값을 갖게 되므로 연장율은 $\left\lfloor \frac{3}{2}(n-1) \right\rfloor$이므로, 임베딩 연장율 비용은 $O(n)$이다.

4. 결 론

본 논문에서는 스타그래프 부류로 널리 알려진 스타(Star) 그래프와 팬케익(Pancake) 그래프 그리고 버블정렬(Bubblesort) 그래프간의 임베딩을 보이고, 각 그래프 사이의 임베딩 비용을 분석했다. 버블정렬 그래프가 팬케익 그래프와 스타 그래프에 각각 연장율 3, 확장율 1로 임베딩 가능함을 보였고, 팬케익 그래프가 버블정렬그래프에 임베딩 하는 연장율 비용이 $O(n^2)$임을 보였다. 그리고 스타 그래프가 팬케익 그래프에 연장율 4, 확장율 1로 임베딩 가능함을 증명했다. 또한 스타그래프를 버블정렬 그래프에, 팬케익 그래프를 스타 그래프에 임베딩 하는 연장율 비용이 각각 $O(n)$임을 보였다.

이러한 결과는 버블 정렬 그래프에서 개발된 여러 가지 알고리즘을 팬케익 그래프와 스타 그래프에서 효율적으로 이용할 수 있음을 의미하고, 스타 그래프에서 개발된 여러 가지 알고리즘을 팬케익 그래프에서 효율적으로 이용할 수 있음을 의미한다. 또한 본 논문의 결과는 스타 그래프와 버블 정렬, 팬케익 그래프의 여러 가지 성질을 분석하는데 유용한 연구 자료로 사용될 것이다.

참 고 문 헌

[1] Bettayeb, S., Cong, B., Girou, M., & Sudborough, I. H. (1996). Embedding star networks into hypercubes. *IEEE Trans. Computers*, 45(2), 186-194.

[2] Fan, J., Jia, X., & Lin, X. (2007). Optimal embedding of paths with various lengths in twisted cubes. *IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems*, 18(4), 511-521.

[3] Hamdi, M., & Song, S. W. (1997). Embedding hierarchical hypercube networks into the hypercube. *IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems*, 8(9), 897-902.

[4] Lin, J.-C., Chi, T.-H., Keh, H.-C., & Lion, A.-H. A. (2001). Embedding of complete binary tree with 2-expansion in a faulty flexible hypercube. *Journal of Systems Architecture*, 47(6) 543-548.

[5] Shen, X., Liang, W., & Hu, Q. (1997). On embedding between 2d meshes of the same size. *IEEE Trans. Computers*, 46(8), 880-889.

[6] 김종석・이형옥・김성원 (2009). 상호연결망 폴디드 하이퍼-스타 FHS(2n,n)의 대칭성과 임베딩 알고리즘. 정보처리학회 논문지 A, 16-A(6), 501-508.

[7] 김종석・이형옥・김성원 (2009). 계층적 폴디드 하이퍼스타 네트워크의 임베딩 알고리즘. 정보처리학회 논문지 A, 16-A(4), 299-306.

[8] Akers, S. B., Harel, D., & Krishnamurthy, B. (1987). The star graph: an attractive alternative to the n-cube. *Int. Conf. Parallel Processing*, 393-400.

[9] Akers, S. B., & Krishnamurthy, B. (1989). A group-theoretic model for symmetric interconnection network. *IEEE Trans. Computers*, 38(4), 555-565.

[10] Chou, Z.-T., Hsu, C.-C., & Sheu, J.-P. (1996). Bubblesort star graphs: a new interconnection network. *Int. Conf. Parallel and Distributed Systems*, 41-48.

[11] Latifi, S., & Srimani, P. K. (1996). Transposition networks as a class of fault-

tolerant robust networks. *IEEE Trans. Computers*, 45(2), 230-238.

[12] Yeh C. H., & Varvarigos, E. A. (1998). Macro-star networks: efficient low-degree alternatives to star graphs. *IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems*, 9(10), 987-1003.

[13] Mendia, V. E., & Sarkar, D. (1992). Optimal broadcasting on the star Graph. *IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems*, 3(4), 389-396.

[14] Sawada, N., Kaneko, K., & Peng, S. (2007). Pairwise Disjoint Paths in Pancake Graphs. *Int. Con. Parallel and Distributed Comoputing, Applications and Technologies*, 376-382.

[15] Tsai, P.-Y., Fu, J.-S., & Ghen, G.-H. (2008). Edge-fault-tolerant hamiltonicity of pancake graphs under the conditional fault model. *Theoretical Computer Science.* 409, 450-460.

[16] Araki, T., & Kikuchi, Y. (2007). Hamiltonian laceability of bubble-sort graphs with edge faults. *Information Sciences*, 177(13), 2679-2691.

[17] Suzuki, Y., & Kaneko, K. (2008). The container problem in bubble-sort graphs. *IEICE Trans. Information and Systems*, E91-D(4), 1003-1009.

김 종 석

1995 순천대학교 전자계산학과(이학사)
2001 순천대학교 컴퓨터과학과(이학석사)
2004 순천대학교 컴퓨터과학과(이학박사)
2005 ~ 2008 오클라호마 주립대학교 컴퓨터과학과 박사후과정
2008 ~ 현재 영남대학교 정보통신공학과 연구교수
관심분야: 병렬 및 분산처리, 계산이론, 알고리즘, 네트워크 설계 및 분석
e-Mail: rockhee7@gmail.com

이 형 옥

1994 순천대학교 전산학과(이학사)
1996 전남대학교 전산통계학과(이학석사)
1999 전남대학교 전산통계학과(이학박사)
1999 ~ 2002 한국정보사회진흥원(선임연구원)
2006 ~ 2007 University of Texas at Dallas 교환교수
2002 ~ 현재 순천대학교 컴퓨터교육과 부교수
관심분야: 병렬 및 분산처리, 계산이론, 알고리즘, 네트워크 설계 및 보안
e-Mail: oklee@sunchon.ac.kr

김 성 원

1990 서울대학교 제어계측공학과(공학사)
1992 서울대학교 제어계측공학과(공학석사)
2002 서울대학교 전기컴퓨터공학부(공학박사)
2005 ~ 현재 영남대학교 정보통신공학과 부교수
관심분야: 무선 네트워크, 모바일 네트워크, 임베디드시스템
e-Mail: swon@ynu.ac.kr